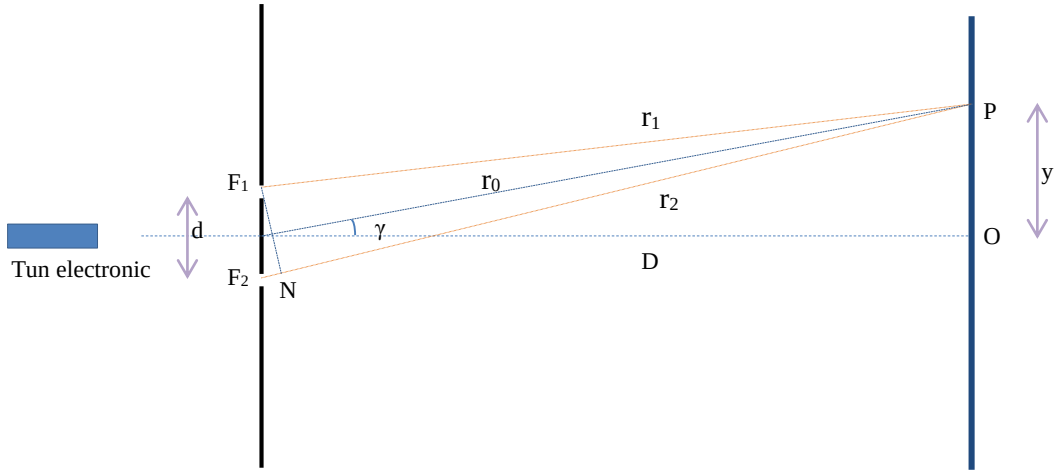
INTERFERENTA ELECTRONILOR ÎN DISPOZITIVUL YOUNG. O ABORDARE CVASI-CUANTICĂ

În experimentul interferenței electronilor cu dispozitivul Young, figura de interferență se formează pe ecran atunci când nu vrem să observăm electronii în spațiul dintre fante și ecran, în caz contrar se relevă caracterul corpuscular iar figura de interferență se distruge. Figura de interferență se obține chiar și atunci când trimitem electronii unul câte unul spre fante, fiecare electron producând un impact vizibil pe ecran, în mod aleatoriu, dar astfel încât în final să se reconstituie figura de interferență așa cum se obține cu unde, la fel ca într-un puzzle (nu se formează toată figura de la început foarte pală și apoi din ce în ce mai clară, mai contrastantă). Același lucru se poate observa și în cazul fotonilor, aceștia putând fi trimiți unul câte unul cu ajutorul unui laser. În cele ce urmează vom considera că fantele sunt dreptunghiulare dar analizăm figura de interferență ca și cum s-ar produce în planul foii, adică în cazul unidimensional. Tot pentru simplitate, nu analizăm decât interferența undelor nu și difracția. În zona de interferență electronii se comportă ca undă iar la impactul cu ecranul și până la intrarea în fante ei se relevă ca și corpusculi și nu există niciun experiment care să dezvăluie ambele aspecte simultan: obiectul microscopic este SAU undă SAU corpuscul, funcție de experiment. Iar atunci când nu îl forțăm să se manifeste anume în cadrul unui experiment, poate fi și undă și corpuscul sau nici una nici cealălaltă. În articolul de față ne propunem să analizăm dacă electronii există în spațiul dintre paravanul cu fante și ecran ca și corpusculi în timp ce undele de Broglie asociate sunt doar un ghid (pilot) și dacă afirmația ”orice încercare de a ne imagina anumite traiectorii în spațiul dintre fante și ecran este lipsită de sens” este pe deplin justificată. Pentru început prezentăm cunoscuta teorie a interferenței cu dispozitivul Young.



Se construiește segmentul F_1N perpendicular pe segmentul FP (unde F este mijlocul lui F_1F_2). Astfel unghiul făcut de F_1N cu F_1F_2 va fi egal cu unghiul dintre segmentele FP și FO, adică γ. Pentru $D>>d$ putem scrie:

$$tg\gamma = \frac{y}{D} \cong sin\gamma \cong \frac{r_2 - r_1}{d} = \frac{\delta}{d}$$

în care δ este diferența de drum optic dintre cele două ”raze” din experimentul Young. Mai putem scrie:

$$r_2^2 = (y + d/2)^2 + D^2; \quad r_1^2 = (y - d/2)^2 + D^2 \quad \rightarrow \quad r_2^2 - r_1^2 = 2yd$$

Uneori se notează $d = 2l$. Rezultă: $\delta \cong 2lsin\gamma \cong 2ly/D$. Iar din a doua relație, $r_2 + r_1 = 2yd/\delta \cong 2D$

Dacă dorim o eroare ceva mai mică, calculăm $sin\gamma = \frac{y}{\sqrt{y^2+D^2}} \rightarrow \delta \cong \frac{yd}{\sqrt{y^2+D^2}}$ și $r_2 + r_1 = 2\sqrt{y^2 + D^2}$.

Unda de probabilitate în punctul P este o superpoziție a undelor corespunzătoare provenite de la cele două fante.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_0 e^{i(\omega t - kr_1)} + \psi_0 e^{i(\omega t - kr_2)} = \psi_0[cos\alpha_1 + cos\alpha_2 + isin\alpha_1 + isin\alpha_2]$$

$$\psi = 2\psi_0 \left[cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + isin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right]$$

$$\psi = 2\psi_0\left[cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1+r_2)\right)cos\frac{k}{2}(r_2-r_1) + isin\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1+r_2)\right)cos\frac{k}{2}(r_2-r_1)\right]$$

$$\psi = 2\psi_0 cos\frac{k}{2}(r_2-r_1)exp\left[i\left(\omega t - \frac{k}{2}(r_1+r_2)\right)\right] = 2\psi_0 cos\frac{k\delta}{2}e^{i\left(\omega t - k\sqrt{y^2+D^2}\right)} \cong 2\psi_0 cos\frac{k\delta}{2}e^{i(\omega t - kD)}$$
$$= \Psi_0 e^{i(\omega t - kD)}$$

Amplitudinea undei compuse este: $\Psi_0 = 2\psi_0 cos\frac{k\delta}{2} = 2\psi_0 cos\frac{kyd}{2\sqrt{y^2+D^2}} \cong 2\psi_0 cos\frac{kyd}{2D}$. Ea variză sinusoidal cu ordonata y. Aproximarea se referă la ordonate y<<D când $\sqrt{y^2+D^2} = D\sqrt{1+(y/D)^2} \rightarrow D$.

Intensitatea undei este $I \sim |\psi|^2 = \Psi_0^2 = 4\psi_0^2 cos^2\frac{k\delta}{2} = 2\psi_0^2(1+cosk\delta)$ ceea ce se justifică în continuare.

Intensitatea undei este proporțională cu media în timp a pătratului amplitudinii fizice (partea reală):

$$I = \alpha\frac{1}{T}\int_0^T \psi^2 dt = \alpha\frac{4\psi_0^2}{T}cos^2\frac{k\delta}{2}\int_0^T cos^2(\omega t - kD)dt = \alpha\Psi_0^2\frac{1}{2T}\int_0^T(1+cos2x)dt$$
$$= \alpha\Psi_0^2\frac{1}{2T}\left(T + \frac{sin2x}{2\omega}\Big|_0^T\right) = \frac{\alpha\Psi_0^2}{2} = 2\alpha\psi_0^2 cos^2\frac{k\delta}{2} = 4I_0 cos^2\frac{k\delta}{2} = 2I_0(1+cosk\delta)$$

deoarece, pentru o undă simplă, $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - kr)}$, intensitatea ei va fi:

$$I_0 = \alpha\frac{1}{T}\int_0^T \psi^2 dt = \alpha\frac{\psi_0^2}{T}\int_0^T cos^2(\omega t - kr)dt = \alpha\frac{\psi_0^2}{2T}\int_0^T(1+cos2x)dt = \alpha\frac{\psi_0^2}{2T}(T+0) = \frac{\alpha\psi_0^2}{2}$$

Pentru unda compusă se obțin maximele și minimele intensității, astfel (m=0,1,2,...):

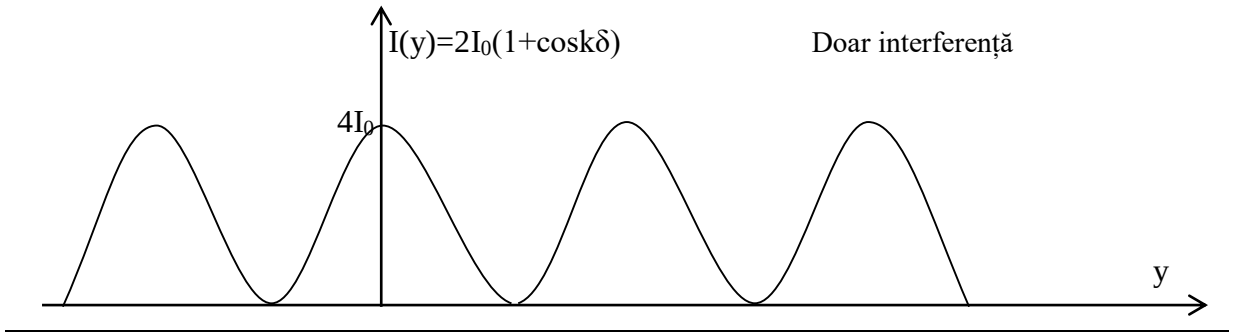
- minim: $\frac{k\delta}{2} = \frac{(2m+1)\pi}{2} \rightarrow \delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$
- maxim: $\frac{k\delta}{2} = \frac{2m\pi}{2} \rightarrow \delta = m\lambda \rightarrow I = 4I_0$

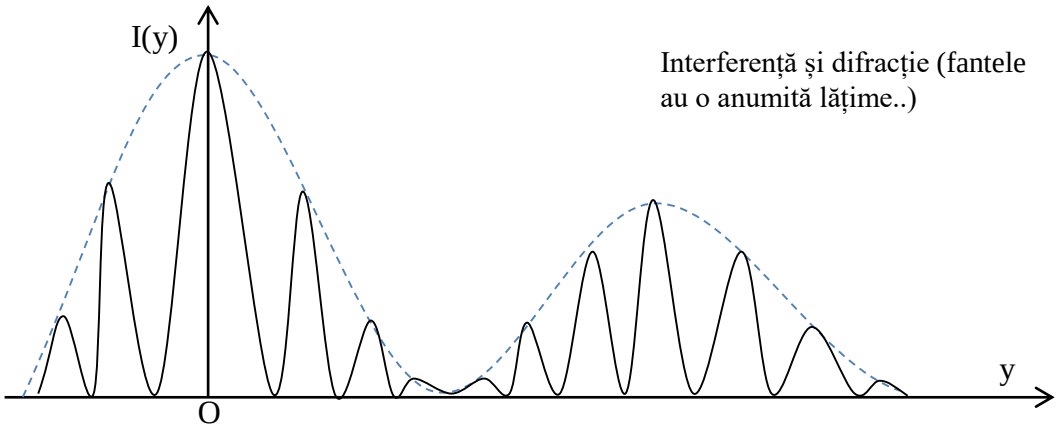
Distanța dintre două maxime de interferență consecutive se calculează astfel:

$$\delta = \frac{yd}{D} = m\lambda \rightarrow y_m = \frac{m\lambda D}{d} \rightarrow i = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}$$

Mărimea i se numește *interfranjă*, iar numărul m - ordin de interferență. Distanța dintre două minime de interferență consecutive este de asemenea egală cu interfranja.

$$\boldsymbol{I = 4I_0 cos^2\frac{k\delta}{2} = 2I_0(1+cosk\delta) = 2I_0\left(1+cos\frac{2\pi}{i}y\right)}$$





<u>Încercăm să lucrăm acum</u> fără aproximări, pentru început fără aproximarea $\delta = yd/D$.

$sin\gamma = \frac{y}{\sqrt{y^2+D^2}}$ iar $r_2 - r_1 \cong dsin\gamma = \frac{yd}{\sqrt{y^2+D^2}} = \frac{yd}{D\sqrt{(y/D)^2+1}}$

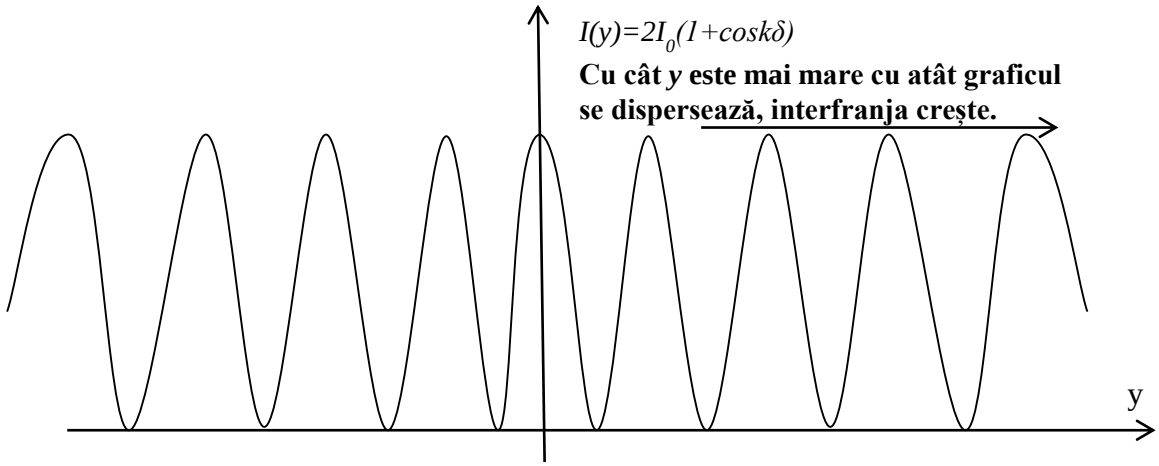
Caz în care interfranja nu mai e riguros constantă, ci depinde sensibil și de *y*: $\frac{yd}{D\sqrt{(y/D)^2+1}} = m\lambda \rightarrow (yd)^2 = (m\lambda)^2[y^2 + D^2] \rightarrow y^2 = (m\lambda D)^2/(d^2 - (m\lambda)^2)\ etc.$

De observat faptul că dacă apropiem ecranul de paravan cu distanța *x*, *D'=D-x*, "raza" r_0 (a cărei înclinație rămâne neschimbată în acest timp) întâlnește ecranul din noua poziție în punctul *y'=yD'/D* și $\delta' = \frac{y'd}{D'\sqrt{(y'/D')^2+1}} = \frac{yd}{\sqrt{y^2+D^2}} = \delta$, ceea ce înseamnă că, prin apropierea ecranului de paravan, graficul *I(y)* își păstrează forma dar se comprimă pe verticală *proporțional*. Aceasta poate fi interpretată prin afirmația că electronii parcurg traiectorii rectilinii de la fante spre punctul considerat de pe ecran. Prin traiectorii înțelegem liniile ce unesc aceleași valori maxime ale intensității $I = 2I_0(1 + cosk\delta)$ de pe ecran, când acesta se deplasează pe orizontală, adică **raze de egală fază** după cum vom vedea mai jos. Știm că mecanica cuantică nu admite noțiunea de traiectorie și că în spațiul dintre paravan și fante nici nu întâlnim electronul ca particulă (ci ca undă), decât dacă vrem să-l detectăm, caz în care se va distruge figura de interferență. Analiza de mai jos se va referi tocmai la posibilitatea existenței acestor traiectorii.

La deducerea relației $\delta' = \delta$ am făcut aproximarea: $\delta \cong dsin\gamma$. Se poate demonstra (v. și graficele ce urmează) că, în lipsa și a acestei aproximări, drumul optic

$$r_2 - r_1 = \delta = \sqrt{(y + d/2)^2 + D^2} - \sqrt{(y - d/2)^2 + D^2}$$

nu își mai păstrează valoarea riguros atunci când modificăm pe *D* și proporțional pe *y*. Diferența $\delta' - \delta = \rho$ descrește către zero cu cât *d* este mai mic, cu cât *y* este mai mic și cu cât *D* este mai mare (dar și cu cât *D-D'* este mai mică), deci $\rho \sim yd/D$. Așa-zisele traiectorii ale electronilor ce interferă sunt niște linii cu o curbură cu atât mai mare cu cât ecranul e mai aproape de fante sau cu cât ne depărtăm pe verticală de centrul ecranului spre marginile sale.



Faza fiecărei raze ce ajunge la ecran apare în relația : $I = 2I_0(1 + cos\varphi)$. Fixând faza $\varphi = k\delta = k\sqrt{(y + d/2)^2 + D^2} - \sqrt{(y - d/2)^2 + D^2}$, aflăm *y* funcție de φ prin ridicare la pătrat și efectuând calculele. Rezultă în final ordonata la ecran a fiecărei *raze de egală fază* (folosim notația $\phi = \frac{\varphi}{kd}$):

$$\boldsymbol{y = \frac{\varphi}{2k}\sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2 - (\varphi/k)^2}} = D\phi\sqrt{\frac{d^2}{4D^2} + \frac{1}{1 - \phi^2}}}$$

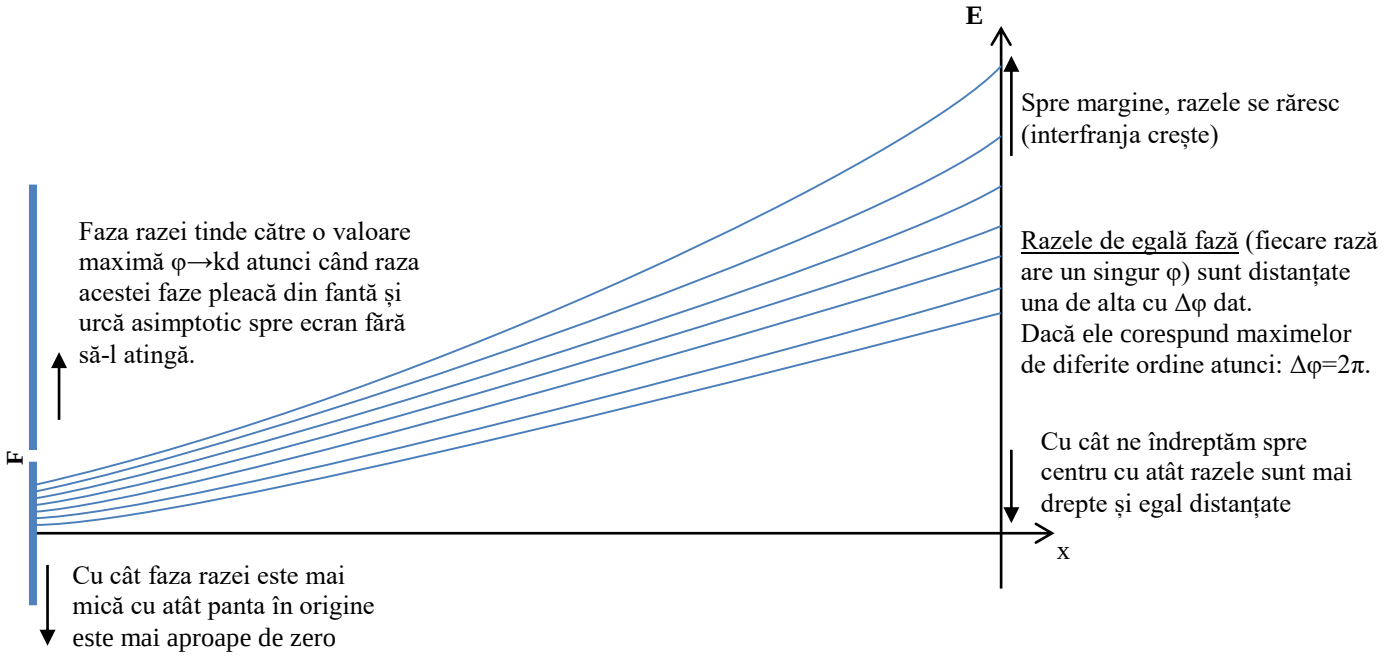
Observăm că $y \to \infty$ când $\varphi \to kd$. În ipoteza $\varphi \ll kd$ (domeniul razelor rectilinii) putem aproxima: $\boldsymbol{y = \frac{\varphi D}{kd}\sqrt{\frac{d^2}{4D^2} + 1}}$ sau, dacă e satisfăcută și condiția *D>>d* rezultă: $y \cong \frac{\varphi D}{kd} = \frac{\varphi\lambda D}{2\pi d} = \frac{\varphi i}{2\pi}$ adică $\varphi = \frac{2\pi}{i}y$.

Dacă avem unghiuri medii (ϕ nu e *mult* mai mic decât 1) dar *D>>d*, preferăm aproximarea: $\boldsymbol{y} = D\sqrt{\frac{d^2\phi^2}{4D^2} + \frac{\phi^2}{1-\phi^2}} \cong \boldsymbol{\frac{D\phi}{\sqrt{1-\phi^2}}}$, ceea ce înseamnă $\boldsymbol{\phi = \frac{y/D}{\sqrt{1-(y/D)^2}} = \frac{1}{\sqrt{ctg^2\gamma - 1}}}$, adică faza φ nu depinde decât de unghiul la centru γ (raza de egală fază este o dreaptă în continuare, și pentru unghiuri φ ceva mai mari): deplasarea ecranului nu modifică unghiul sub care se văd punctele de aceeași fază din graficul intensității. Pentru unghiuri γ mici, $\phi \cong tg\gamma$. Chiar și pentru unghiuri φ mai mari, razele de egală fază sunt drepte (dacă ecranul este mai departe de fante) și sunt uniform repartizate în spațiu, *în sistemul de coordonate al fazei* (nu se distanțează cu creșterea lui γ ca în cazul creșterii ordonatei *y*).

Mai putem găsi pentru maximele de interferență ($\varphi = 2m\pi$) punctele:

$$y_m = mi\sqrt{\frac{d^2}{4D^2} + \frac{1}{1 - (m\lambda/d)^2}} \cong mi\sqrt{\frac{d^2}{4D^2} + 1}$$

Ecuația de schimbare de variabilă $y = y(\varphi)$ de mai sus ne permite să analizăm și dependența *y=y(D)* sau, cu altă notație *y=y(x)*, pentru o rază de fază dată (ecuație reprezentată în graficul de mai jos). Toate razele de egală fază ce ajung la ecran pornesc din spațiul dintre fante, celelalte raze, ce pornesc din fante sau din afara spațiului dintre fante nu pot ajunge la ecran (se curbează către înapoi, înainte de a ajunge la ecran).



Razele din figură sunt cvasirectilinii (*cu o aproximație foarte bună sunt drepte*), curbura arătată în figură este exagerată pentru a semnala micile variații de margine (condiții la limită). Conform figurii, curba de interferență *I=I(y)* se îngustează tot mai mult cu cât apropiem ecranul de paravanul cu fante dar în același timp se și dispersează mai repede cu creșterea lui *y*. Razele pornesc din spațiul dintre fante și nu din fante ceea ce constituie un impediment în a asimila aceste raze cu traiectoriile electronilor! Trebuie însă probat experimental dacă interferența se produce pentru distanțe *D* atât de mici. Pentru fenomenul de interferență a electronilor petrecut în afara condițiilor la limită, rămânem deocamdată la ipoteza că razele de egală fază coincid cu traiectoriile electronilor.

Obs. Ecuațiile acestor raze nu coincid (decât în aproximarea *d/2→0*) cu ecuațiile unor drepte ce pornesc *din cele două fante* și ajung la ecran, adică: $y_{1,2} = \left(y_E \mp \frac{d}{2}\right)\frac{x}{D} \pm \frac{d}{2}$, unde y_E este ordonata punctului de pe ecran unde are loc impactul cu electronul.

Trecând la coordonatele unghiulare și încercând să facem să coincidă razele de egală fază cu traiectoriile drepte ce pornesc din fante => $\phi x\sqrt{\frac{d^2}{4x^2}+\frac{1}{1-\phi^2}} = \left(\phi D\sqrt{\frac{d^2}{4D^2}+\frac{1}{1-\phi^2}} - \frac{d}{2}\right)\frac{x}{D} + \frac{d}{2}$ care poate fi adevărată doar dacă facem fantele să coincidă ($y_{1,2} = y_E x/D$), adică dacă aproximăm *d/2→0*.

Altfel: $y = \phi x\sqrt{\frac{d^2}{4x^2}+\frac{1}{1-\phi^2}}$ și $y' = \phi x'\sqrt{\frac{d^2}{4x'^2}+\frac{1}{1-\phi^2}}$ => $\frac{y}{y'} \cong \frac{x}{x'}\sqrt{\frac{1+\frac{d^2}{4x^2}}{1+\frac{d^2}{4x'^2}}} \cong \frac{x}{x'}$

ceea ce înseamnă că traiectoriile drepte ce pleacă din fante coincid cu razele de egală fază doar la distanțe mai mari față de fante și unghiuri nu prea mari φ sau traiectoriile sunt cu atât mai drepte cu cât porțiunile din traiectorii sunt mai scurte. Însă cu o restricție: e vorba doar de traiectoriile ce pleacă de la o fantă și ajung în jumătatea de ecran aflată de aceeași parte cu fanta, nu și cealălaltă jumătate a ecranului! Nimic nu ar explica de ce electronii nu pot avea traiectorii care să traverseze axa de simetrie Ox a sistemului de interferență.

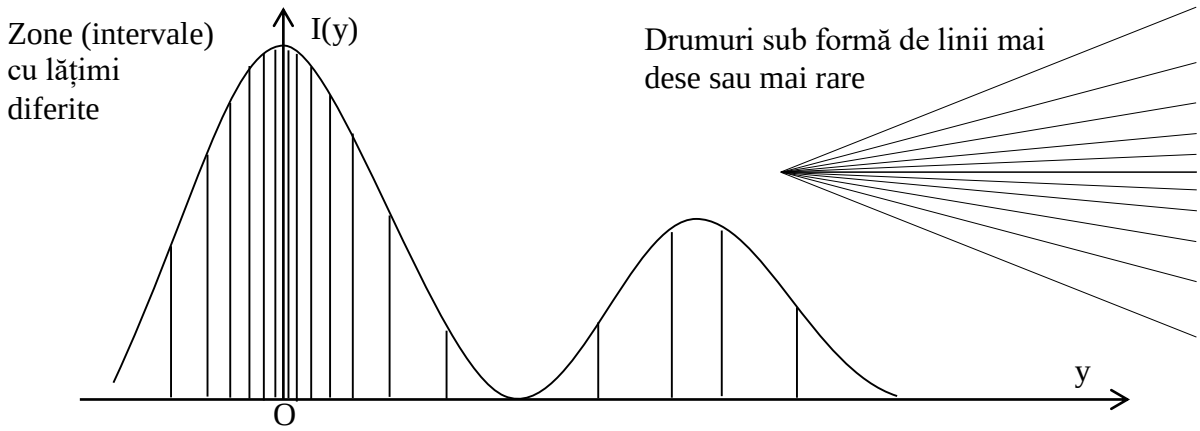
Putem să ne imaginăm în spațiul dintre paravan și ecran un patern de interferență format din linii ce își iau originea în spațiul dintre fante și se termină spre ecran, corespunzătoare maximelor de diferite ordine, respectiv linii de culoare albă, corespunzătoare minimelor de interferență, sau linii de culoare gri pentru intensități intermediare. Aceste puncte de maxim și minim au asociate probabilități maxime sau nule ce ne dau informații despre localizarea electronului. De exemplu, într-un punct dat M(y) probabilitatea ca electronul să existe (să fi avut loc un impact cu ecranul) este proporțională cu intensitatea curbei de interferență în acel loc *P(y) ≈ I(y)*;

aceasta arată că în *acel punct* vor exista mai mulți sau mai puțini electroni, iar nu cum ar trebui, într-un domeniu de lățime Δy probabilitatea existenței electronilor e mai mare sau mai mică (adică localizarea electronilor este mai mult sau mai puțin densă, deoarece electronii nu se suprapun în același loc pentru a avea un impact mai vizibil cu ecranul, ci se aglomerează în anumite locuri ca la reconstituirea unui puzzle). Acest mod de a interpreta probabilitatea de localizare ar presupune că electronii țin cont de cei intrați în sistem înaintea lor. Alt mod de interpretare ar afirma că primii electroni lovesc întâi punctele unde probabilitatea e mai mare, ceea ce de asemenea e greșit. Electronii vor lovi ecranul, nu mai des în punctele unde intensitatea undei e mai mare, ci mai ales *în zonele* unde intensitatea undei este mai mare. Deci corect ar fi: $dP(y) = P(y)dy \approx I(y)dy$, adică probabilitatea de localizare a electronului pe ecran în zona lineară Δy aflată în jurul coordonatei y este:

$$P(y) \approx \int_{y-\Delta y/2}^{y+\Delta y/2} I(y)dy$$

Pentru că probabilitatea ca electronul să fie undeva pe ecran este 1, înseamnă că constanta de proporționalitate în expresia de mai sus este $1/\int_{tot\ ecranul} I(y)dy$. În această idee, putem spune, măcar retrospectiv, că după ce electronul a făcut un impact cu ecranul, el a ales un drum de la fantă spre ecran (facem abstracție că aceste linii nu pornesc tocmai din fantă), iar probabilitatea asociată acelei linii este dată de probabilitatea asociată locului de impact cu ecranul, respectiv intensității *I(y)* corespunzătoare acelui punct. Astfel, drumurile ce pleacă de la fante sunt ca un evantai, la fel de dese pe întreg spectrul, dar mai ”**bătătorite**” sau ”**mai puțin bătătorite**”, funcție de probabilitatea mai mare sau mai mică asociată acestora. Astfel că electronii ”intră” pe drumurile acestea cu anumite probabilități, cu cât drumul e mai bătătorit (corespunzător unui maxim de exemplu) cu atât probabilitatea ca electronul să îl parcurgă este mai mare. În această accepțiune, un punct de pe ecran corespunzător unui maxim de interferență este lovit de mai mulți electroni, iar un punct din grafic care nu este maxim, este lovit de mai puțini electroni, respectiv deloc. În realitate figura de interferență se formează în urma unor impacturi dintre electroni și ecran mai dese sau mai rare, ca într-un puzzle. Astfel, trebuie să ne imaginăm un alt mecanism privind traiectoriile electronilor corespunzător spațiului dintre paravan și ecran. Anume, evantaiul de drumuri este format din drumuri ”egal bătătorite”, dar **mai dese sau mai rare**, funcție de distribuția maximelor și minimelor de pe ecran. Existența unui electron pe unul din aceste drumuri o putem prevedea cu o anumită probabilitate, *egală pentru toți electronii* (la intrare în sistem drumurile apar uniform repartizate), corespunzător cu distribuția spațială a acestor drumuri: ele sunt cu atât mai dese cu cât leagă un punct de pe ecran unde intensitatea undei este mai mare și cu atât mai rare cu cât leagă un punct de pe ecran unde intensitatea undei este mai mică (respectiv nici-un drum către punctul unde intensitatea e nulă).

<u>Cum calculăm densiteatea drumurilor în spectrul acestora?</u> Împărțim axa Oy de pe ecran în porțiuni/intervale de lățimi mai mici sau mai mari, cu cât graficul intensității undei este mai înalt (intensitatea *I(y)* are valori mai mari) cu atât porțiunile vor fi mai dese (mai înguste), iar pe porțiunile unde graficul intensității va avea valori mai mici, aceste porțiuni vor fi mai rare, deci cu lățimi mai mari. Astfel, drumul de la o fantă la ecran va fi o linie fără grosime ce unește fanta cu centrul zonei *(y-l/2,y+l/2)* de lățime *l*: $l(y) \sim 1/I(y)$. Întru-cât lățimile drumurilor în zona de impact nu trebuie să se suprapună rezultă că drumurile pleacă din fante ca linii fără grosime și apoi se lățesc corespunzător spre ecran. Putem să înlocuim drumurile mai dese sau mai rare cu drumuri adiacente ce *devin tot mai late*, mai mult sau mai puțin late funcție de distribuția intensităților *I(y)* de pe ecran. Presupunem că avem o curbă oarecare a intensității pe ecran și o împărțim în zone de diferite lățimi:



Plecând de la coordonata $y_0=0$, în centrul ecranului, porțiunile lineare au grosimea: $l_i = y_{i+1} - y_i$ (cu i=1,2,3...) sau alegem un punct $z_i = (y_{i+1} + y_i)/2$ astfel ca $y_i = z_i - l_i/2$ și $y_{i+1} = z_i + l_i/2$ ($z_0=0$).
Dacă împărțim graficul din figura de mai sus în arii egale *a*, cea mai îngustă dintre ele se va afla la coordonata *y=0*, unde intensitatea *I(y)* este maximă. Aria elementară $a = 2\int_{y_0}^{y_1} I(y)dy \cong I(y_0)l_0$ unde $l_0 = 2(y_1 - y_0)$.
Apoi: $a = \int_{y_i}^{y_{i+1}} I(y)dy = \int_{z_i - l_i/2}^{z_i + l_i/2} I(z)dz = l_i\overline{I(l_i)}$ oricare ar fi *i=1...n-1*, unde *n* este numărul de arii *a* de sub grafic. Adunând toate aceste arii pe întreaga figură de interferență obținem:

$$a + 2\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}} I(y)dy = na = A_{tot} = 2\int_0^L I(y)dy$$

Presupunând că pe fiecare drum așternut până la ecran se află câte *e* electroni, rezultă *ne=N*, unde *N* este numărul total de electroni ce intră prin fante (obligatoriu foarte mare astfel ca fiecare drum să fie parcurs de același număr *e* de electroni). Dacă luăm $2L = mi$, adică un număr întreg de interfranje, atunci $I(L) = 2I_0\left(1 + cos\frac{2\pi}{i}\frac{mi}{2}\right) = 0$ și $A_{tot} = 2\int_0^L I(y)dy = 4I_0\int_0^L\left(1 + cos\frac{2\pi}{i}y\right)dy = 4I_0L$.
Aria graficului aflat între două minime consecutive se calculează astfel: $A_1 = 2\int_0^{L_1} I(z)dz = 4I_0L_1 = 2I_0 i$, deoarece: $I(L_1) = 0 = 2I_0\left(1 + cos\frac{2\pi}{i}L_1\right)$ și $L_1 = i/2$. Egalitatea $2L = mi$ va da semnificația numărului *m*: numărul de arii A_1 cuprinse de-alungul lungimii $2L$ a figurii de pe ecran (deci egal cu ordinul de interferență).
Mai rezultă: $2L = m \cdot 2L_1$. Calculul ariei elementare:

$$a = \int_{z_i - l_i/2}^{z_i + l_i/2} I(y)dy = 2I_0\int_{z_i - l_i/2}^{z_i + l_i/2}(1 + cosk\delta)dy = 2I_0 l_i + 2I_0\frac{i}{2\pi}sin\left(\frac{2\pi}{i}y\right)\Big|_{z_i - l_i/2}^{z_i + l_i/2}$$

Folosim formula trigonometrică $sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, rezultă: $a = 2I_0 l_i + 2I_0\frac{i}{\pi}sin\frac{\pi l_i}{i}cos\frac{2\pi z_i}{i}$.
Pe de altă parte această arie este echivalentă cu aria unui dreptunghi: $a = l_i\overline{I(l_i)}$.
Rezultă: $\overline{I(l_i)} = 2I_0 + 2I_0 cos\frac{2\pi z_i}{i}\left(\frac{sin\frac{\pi l_i}{i}}{\frac{\pi l_i}{i}}\right) \to 2I_0\left(1 + cos\frac{2\pi z_i}{i}\right) \cong I(z_i)$. Paranteza este $\frac{sinx}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$.
Aproximarea e cu atât mai bună cu cât aria elementară este mai îngustă (l_i mic), spre exemplu în punctul *y=0*:

$$a = 2\int_0^{y_1} 2I_0\left(1 + cos\frac{2\pi y}{i}\right)dy = 2I_0 l_0 + 4I_0\frac{i}{2\pi}sin\left(\frac{2\pi}{i}y_1\right) = 2I_0 l_0 + 2I_0 l_0\frac{sin\left(\frac{\pi}{i}l_0\right)}{\frac{\pi}{i}l_0} = 4I_0 l_0$$

Aproximarea $\frac{sinx}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ se justifică și pentru l_i mare întru-cât porțiunile din grafic pe aceste zone sunt aproape liniare și media pe porțiune este aproape egală cu $I(z_i)$ la jumătatea porțiunii ($z_i = (y_{i+1} + y_i)/2$).
Din formula $a = l_i\overline{I(l_i)} \cong I(z_i)l_i$ => $\boldsymbol{l_i \cong a/2I_0\left(1 + cos\frac{2\pi z_i}{i}\right) = l_0/cos^2\frac{\pi z_i}{i}}$.
Din $na = A_{tot} = 4I_0L$ rezultă $\boldsymbol{n = L/l_0}$. Deci $2l_0$ pare să fie media lățimilor zonelor.

Notând cu N_1 numărul de electroni ce lovesc ecranul în interiorul ariei A_1 și cu n_1 numărul de arii elementare cuprinse de aceeași arie, avem relațiile:
A_1 $N = N_1 m$, $N_1 = en_1$, $mn_1 = n \rightarrow N = en = eL/l_0$, $N_1 = eL/ml_0$, $n = L/l_0$ și $n_1 = L_1/l_0 = n/m$.
Dacă pentru simplificare, impunem condiția ca pe fiecare drum să existe doar un singur electron ($e=1$) rezultă: $l_0 = L/N$. De aici rezultă că cu cât numărul de electroni N este mai mare cu atât trebuie îngustat l_0 (pentru numărul e fixat).
Fixând un unghi maxim față de axa Ox al traiectoriilor electronilor $tg\alpha = L/D$, rezultă că atunci când scade distanța dintre fante și ecran, scade corespunzător și L, respectiv L_1 și interfranja i, deci se îngustează figura de interferență și implicit lățimea drumurilor spre ecran ($l_0 = L/N$).
Până să ajungă la fante, un electron are probabilitatea ½ de a intra pe una din fante (adică, cu cât crește numărul N al electronilor ce trec prin fante, cu atât numărul lor ce trece printr-o fantă anume tinde către valoarea $N_0 = N/2$). După ce trec prin una din fante în fața electronilor se aștern un număr mare de drumuri ce devin tot mai late, mai mult sau mai puțin, funcție de locul de pe ecran unde ele se termină. Probabilitatea ca electronul să ”intre” pe unul din drumuri este egală pentru orice drum, adică cu cât există mai mulți electroni trimiși prin acea fantă (N_0) cu atât crește șansa ca fiecare drum să fie parcurs de către un electron (sau un număr egal de electroni, e), deci probabilitatea asociată unui drum anume este $1/N_0$. [Ca la zaruri: nu există o predilecție ca la una din aruncări să apară un anume număr, astfel că atunci când numărul de aruncări tinde spre infinit, numărul aparițiilor fiecărei cifre este același pentru toate cifrele (probabilitatea apariției unei cifre anume este 1/6)]. Dat fiind spectrul acestor drumuri, este evident că vor ajunge mai mulți electroni în final în zonele de pe ecran unde intensitatea undei pilot este mai mare (acolo drumurile ce ajung sunt mai dese).
Avem n zone adiacente pe ecran (respectiv na arii), fiecare corespunzând la e electroni ce au făcut impact cu ecranul. Către aceste zone se îndreaptă drumuri de la fiecare din cele două fante. Putem considera că fiecare fantă conține $n/2$ drumuri, care duc către jumătatea ei de ecran, astfel că vor fi n drumuri în total. Mai putem presupune că de la fiecare fantă pleacă n drumuri, ceea ce ar însemna că $e/2$ electroni pleacă de la fiecare fantă pe un singur drum. Aceste drumuri se întind pe tot ecranul deci electronul ce trece printr-o fantă poate ajunge inclusiv pe jumătatea de ecran situată de partea opusă fantei. Aceasta înseamnă că, în această situație, nu mai putem spera că traiectoriile coincid cu razele de egală fază, nici măcar pe porțiunea rectilinie. Dacă în prima variantă traiectoriile ce se asimilează cu razele de egală fază (având deci o justificare reală) nu pot porni ca acestea din spațiul dintre fante, în cea de-a doua variantă traiectoriile sunt rectilinii, pornesc din fante, dar nu au legătură cu razele de egală fază, deci devin complet imaginare. Prima ipoteză o numim *ipoteza traiectoriilor virtuale* iar cea de-a doua, *ipoteza traiectoriilor imaginare*.
Dacă N electroni intră prin fante și considerăm n drumuri, atunci fiecare drum are probabilitatea să fie parcurs egală cu $1/n=e/N$. La fel: $1/n_0=e/N_0$ pentru prima ipoteză, respectiv $1/n=e/2/N_0=e/N$ pentru a doua ipoteză. Reobținem formula dedusă anterior: $N=ne$. Probabilitatea ca o zonă elementară de pe ecran (de lățime l_i respectiv de arie a) să aibă un impact va fi $P=1/n=e/N=l_0/L$. Rezultă, oricare ar fi indicele i că:

$$P(z_i) = \frac{a}{4I_0L} = \frac{a}{A_{tot}} = \frac{1}{A_{tot}} \int_{z_i - l_i/2}^{z_i + l_i/2} I(y)dy$$

unde l_i este lățimea zonei având în centrul coordonata z_i.
În concluzie: $P(z_i) = \overline{I(l_i)} l_i / A_{tot}$ și $\overline{I(l_i)} = \frac{1}{l_i} \int_{z_i - l_i/2}^{z_i + l_i/2} I(y)dy$.
<u>Deficiențele teoriei traiectoriilor cvasireale</u>. Un detector aflat pe o traiectorie corespunzătoare unui minim $I=0$, nu numai că nu ar trebui să nu distrugă figura de interferență, dar nu trebuie să detecteze niciun electron pe acea direcție. Aceasta ar fi o metodă pentru infirmarea ipotezei traiectoriilor virtuale amintită mai sus. Dacă undele de interferență (unde asociate electronilor, numite unde de Broglie, respectiv, funcții de undă) sunt reale, în locul de intensitate zero unde se află detectorul microscopic, interferența distructivă nu ar trebui să mai aibă loc iar figura de interferență se va strica. Deși experimentul probabil rămâne imaginar, mecanica cuantică se bazează pe ideea că undele sunt totuși reale (chiar dacă sunt unde de probabilitate!) și că în spațiul dintre paravan și ecran electronii se comportă ca unde, deci nu pot avea traiectorii în niciun caz.

În ipoteza traiectoriilor virtuale, traiectoriile electronilor nu satisfac condițiile la limită (razele de egală fază pornesc dintre fante, nu din fante, și se curbează la marginile ecranului); în plus electronii ce trec printr-o anumită fantă nu pot ajunge decât în jumătatea de ecran de aceeași parte cu fanta, astfel încât nu putem vorbi în această ipoteză de traiectorii reale în sensul logicii clasice; în ipoteza traiectoriilor imaginare, când drumurile pornesc din fante (nu se mai identifică cu razele de egală fază și sunt perfect rectilinii), nu se poate decela în ceea ce privește domeniul de ecran pe care îl acoperă traiectoriile electronilor provenind de la fiecare fantă. Ipoteza unor traiectorii care nu au de-a face cu razele de egală fază pare una pur imaginară ce nu ar putea fi probată în nici un fel, dar totuși în spiritul logicii clasice. În ambele cazuri nu poate fi explicat nici de ce drumurile se lărgesc, crescând astfel incertitudinea de poziție. În plus pare a fi imposibil de a detecta prin ce fantă a intrat electronul ce a ajuns la ecran. Se pare că avem libertatea de a ne alege cum dorim forma traiectoriilor electronilor, dar pierdem în acest fel pretenția unui model unic ce se suprapune peste realitate. Compromisul pe care trebuie să îl facem în fiecare caz este prețul plătit pentru a renunța la *arbitrariul realității* stipulat de mecanica cuantică. Oricum, nici nu era vorba de la bun început a spera să se obțină traiectorii clasice, justificabile fără un vreun compromis, aici vorbim mai degrabă de o stratagemă, de modelarea realității.

Avem totuși un alibi în cazul primei ipoteze: numai experimentul poate tranșa problema condițiilor la limită, mai cu seamă că în realitate peste interferență se suprapune și fenomenul de difracție. În plus traiectoriile virtuale sunt niște drumuri cu o anumită lățime pe care electronii se află cu o anumită probabilitate și nu se poate dovedi experimental existența unei curburi a acestor traiectorii.

În cazul celei de-a doua ipoteze facem unele precizări. Știm doar că electronii acoperă zonele de pe ecran despre care am vorbit mai sus cu aceeași probabilitate pentru fiecare zonă (e electroni de fiecare, când N este foarte mare), dar nu știm câți dintre ei provin de la o fantă sau alta; nimic nu ne asigură că electroni de la fanta superioară nu ajung în zona de ecran aflată sub linia de simetrie Ox, respectiv că un număr egal de electroni parcurg toate drumurile ce pornesc de la o singură fantă pe întreaga plajă a figurii simetrice de interferență; ar putea de exemplu, în cazul drumurilor celor mai lungi (zonele de pe ecran cele mai depărtate de fanta 1) să survină mai puțini electroni de la fanta 1 și să fie în schimb ocupate de mai mulți electroni provenind de la fanta 2, astfel ca ei să în sumeze un număr egal cu e (respectiv care tinde către e). Drumurile pornind de la fante către ecran sunt fixe și în număr egal, astfel că la fiecare zonă de pe ecran să ajungă câte 2 drumuri. Presupunând, pentru simplificare, că la fiecare zonă ajung câte 2 electroni ($e=2$), proveniența acestora nu poate fi atribuită celor 2 fante în mod egal; dar nici nu putem afirma că există un domeniu pe care electronii provenind de la o fantă îl acoperă (cu 2 respectiv cu 1 electron) deoarece fenomenul ar fi lipsit de simetrie (exceptând cazul în care domeniul de acoperire se restrânge la câte o jumătate de ecran pentru fiecare fantă). Singura soluție este, dacă nu vrem să impunem vreo restricție (de exemplu, câte 1 electron pentru fiecare drum pornind de la o fantă dată, indiferent cât de departe e acea zonă), este să vorbim de acoperirea drumurilor cu o anumită probabilitate (un drum de la fanta 1 poate fi acupat de 1 electron, de 2, sau de nici unul, funcție de lungimea drumului). Vorbim astfel, nu de $n/2$ drumuri cu probabilități egale, ci de perechi de câte 2 drumuri ce duc la aceeași zonă pe ecran venind de la fante diferite și a căror sumă de probabilități aferente este egală cu aceeași cantitate e/N. *Dar*, în acest caz electronii provenind de la fanta 2 trebuie să-și ocupe drumurile astfel încât să știe de existența electronilor proveniți de la fanta 1 a.î. la fiecare zonă de ecran să se însumeze exact e electroni (vorbim doar de ipoteza $N\rightarrow\infty$). Evident, la un număr N insuficient de mare de electroni, nu ne mai putem aștepta ca fiecare drum să fie parcurs de $e/2$ electroni fiecare (în realitate N nu tinde la infinit și $e/2$ rămâne doar o valoare la care se tinde, iar figura de interferență doar tinde către o simetrie perfectă). În concluzie nu putem vorbi de acoperirea drumurilor cu o anumită probabilitate corespunzătoare lungimilor acestor drumuri (de fapt e vorba de unghiul pe care traiectoria îl face cu linia ce unește tunul electronic cu ecranul și care trece prin fantă). În ipoteza traiectoriilor imaginare, ne rămâne să postulăm că toate $2n$ traiectoriile au aceeași probabilitate ($e/2N$) sau că avem doar n traiectorii care să acopere câte o jumătate de ecran, corespunzător cu fanta de partea căreia se află (caz în care ipoteza poate fuziona cu ipoteza traiectoriilor virtuale). În toate cazurile trebuie să facem compromisuri teoretice, ceea ce ne conduce la o anumită libertate în alegerea modelului/mecanismului și deci către concluzia lipsei de realitate a acestor modele. Dacă nu se poate

imagina un model unic al realității, aceasta înseamnă că realitatea nici nu există? Faptul că punând un ecran în fața electronilor, se relevă existența electronului ca particulă, denotă că electronii există totuși undeva în spațiul dintre fante, doar că prezența lor probabilistică în diferite locuri nu ne permite să detectăm exact unde se află. De aceea vom asimila traiectoriile electronilor mai degrabă cu razele de egală fază chiar dacă aceste traiectorii rămân cu denumirea de virtuale, întrucât nu poate fi justificată forma traiectoriilor după un model viabil cauză-efect în spiritul logicii clasice. Traiectoriile rectilinii ce pornesc din fiecare fantă rămân imaginare, ele nu au o relevanță în raport cu realitatea și de aceea le mai denumim *traiectorii retrospective* (nimic nu ne oprește ca, după ce electronul a făcut impact cu ecranul, să afirmăm că el a avut o traiectorie rectilinie de la fantă spre ecran, dacă aceasta ne ajută totuși cu ceva). Este deci posibil să avem libertatea să ne imaginăm, în măsura în care aceasta ne este util, că electronul parcurge (măcar retrospectiv) traiectorii până la ecran, atâta timp cât aceasta nu incomodează cu nimic calculele și nu se poate dovedi contrariul existenței acestor traiectorii (nu putem dovedi existența acesor traiectorii, dar din același motiv nu le putem nici infirma). Imaginarea unor mecanisme ajutătoare nu e mai goală de conținut decât ambiguitatea lipsei oricărei realități. În acest sens mecanismul imaginat îl denumim ”*teoria traiectoriilor retrospective*” sau ”*teoria traiectoriilor virtuale*”. Sub rezerva că această idee a traiectoriilor retrospective ar putea să nu ne ajute totuși cu nimic în demersul nostru de a învăța și înțelege filosofica fizică cuantică, observăm că **lipsa de realitate** a unor concepte clasice cu corespondent în fizica microparticulelor ne permite să ne imaginăm liber un mecanism ajutător și să alegem liber o realitate în lipsa uneia univoc predefinite. Lipsa de relevanță (nu contează! ...) a unor concepte ca traiectorie, dimensiuni ale particulei, sau întrebări ca ”este electronul un onduscul, adică și undă și corpuscul în același timp?”, etc, nu ne lasă libertatea de a înțelege sau a jongla cu metodele matematice, dar nici nu ne interzice să ne imaginăm o realitate concretă (chiar și imaginată), atâta timp cât imaginarea unor mecanisme inteligibile nu conduce la contradicții indirecte cu datele experimentale sau cele teoretice. Nu putem înțelege o realitate pe care nu ne-o imaginăm, chiar dacă nimic nu ne îndreptățește să afirmăm că ceea ce considerăm că am înțeles până acum la fizică corespunde imaginării unei realități ce se confundă exact cu *realitatea obiectivă* (după Kant, noi nu putem să cunoaștem lucrul său în sine). Singura condiție pe care însă trebuie să o îndeplinească un mecanism imaginat este ca el să aibă un grad mare de generalitate, să acopere un număr cât mai mare de fenomene unde își dovedește valabilitatea. Se pare că, în schimb, în fizica cuantică, nici nu putem avea pretența ca modelul propus să fie conform unei logici consacrate. Dacă privim în alte capitole ale fizicii observăm mai multe astfel de mecanisme imaginate a căror realitate obiectivă nu se mai pune acum la îndoială: în teoria cuantică a câmpurilor interacțiunea este descrisă de schimburi de particule virtuale, în electrodinamica cuantică Feynman introduce istoria traiectoriilor fotonilor. Aceste teorii au *consecințe* ce se probează practic. Dacă imaginarea unor mecanisme nu contravine rezultatelor măsurătorilor experimentale iar stratagema propusă conduce la progresul fizicii teoretice sau măcar facilitează înțelegerea ei, nimic nu ne oprește să dăm o formă concretă realității, să o modelăm în mod convenabil și să o creăm interacționând experimental cu ea, în condițiile în care mecanica cuantică introduce pentru prima dată în filosofia fizicii arbitrariul realității. Lipsa de realitate a unor concepte clasice în domeniul cuantic spune de fapt că e irelevant și superflu ce realitate îți imaginezi, sau că realitatea îmbracă forme diferite funcție de modul cum interacționăm cu ea și abia atunci. În fapt, deranjant nu este că mecanica cuantică descrie imprecis, probabilistic, realitatea, ci faptul că ne interzice să ne imaginăm o anume realitate: ”dacă electronul nu este observat, atunci pesemne că el nici nu există în vreun loc anume, ca și particulă, sau chiar există în mai multe locuri deodată, dacă vreți, cu anumite probabilități”. Această interpretare rămâne însă doar o interpretare, fiind ignorată cu prudență descrierea unei anumite realități, doar pentru faptul că matematica fizicii cuantice preferă să nu dea informații despre o anume realitate. Fizica cuantică nu are nevoie de o anumită descriere a realității, dar filosofic, e preferată de regulă interpretarea lipsei de realitate în locul uneia imaginate, deși fizica cuantică nu tranșează decât matematic chestiunea, nu și din punct de vedere al interpretării. În articolul de față se pun pe picior de egalitate cele două interpretări, subliniindu-se că mecanica cuantică permite existența unei realități și anume în mai multe moduri, adică ne oferă libertatea de a modela realitatea în anumite limite: principiul incertitudinii se transformă acum în imprecizia de a imagina într-un mod unic realitatea; realitatea există, dar la nivelul fundamental avem o anumită libertate în a o descrie, modela.

S-ar spune că această teorie a traiectoriilor virtuale ale microparticulelor pune accentul pe caracterul de corpuscul al acestora, caracterul de undă rămânând unul secundar, unda pilot fiind utilă doar pentru a ghida particulele, a trasa traiectorii sau drumuri pe care să le urmeze particulele, idee care este de fapt întâlnită deja în unele publicații. Așa cum particulele de forță sunt virtuale în raport cu particulele reale, tot așa și undele pilot sunt virtuale în raport cu undele reale, cu proprietăți reale specifice.
Ne putem imagina probabil și o teorie ce accentuează caracterul de undă al microparticulelor. De exemplu, electronul este un pachet de unde cu o anumită întindere în spațiu, o ”râmă” vibrantă ce, atunci când întîlnește paravanul cu fante, alege doar una din ele după cum este în acel moment faza vibrației. Dacă vrem să îl detectăm în spațiul dintre fante și ecran, el interacționează total cu celula fotoelectrică, ambele unde secundare ”se restrâng” într-un pachet de unde ce intră în celulă. Fiindcă e mic, electronul poate vibra repede, corpurile mari vibrează încet și astfel își pierd caracterul ondulatoriu. La impactul cu ecranul pachetul de unde își cedează întreaga energie ecranului, nu poate să cedeze doar o parte (ca și fotonul de altfel, care interacționează cu substanța prin schimb de cuante). Dacă o astfel de teorie ne avantajează mai mult în înțelegerea fizicii cuantice, atunci o putem prefera pe aceasta.