Deplasarea în spaţiu şi timp.

Fie trei puncte materiale O, O’, M, aflate în mişcare uniformă şi rectilinie, care au pornit în acelaşi moment de timp şi din acelaşi loc din spaţiu (Fig.1).

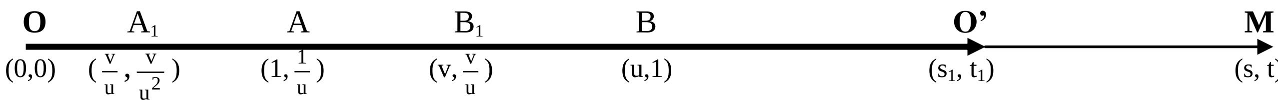

Fig.1

Pe traiectoria descrisă de mişcarea punctului M în raport cu punctul O, reprezentată în Fig.1 printr-o semidreaptă cu originea O, am notat atît coordonatele de spaţiu, cît şi coordonatele de timp asociate punctului M. Ca urmare, traiectoria descrisă de deplasarea punctului M în raport cu punctul O o putem privi ca un instrument de măsură atît pentru distanțe – riglă gradată, cît şi pentru intervale de timp – cronometru. Pe rigla gradată vedem locurile în care se află punctele O, O’ M (0, s_1, s), cît şi distanţele dintre ele (s, s_1, $s_2 = s - s_1$), iar pe cronometru vedem momentele de timp în care se află punctele O, O’, M (0, t_1, t), cît şi intervalele de timp dintre ele (t, t_1, $t_2 = t - t_1$). Remarcăm, totodată, că spre deosebire de coordonatele asociate punctului O, care sunt fixe, coordonatele asociate punctelor M şi O’ se modifică în permanenţă. Intrucît deplasarea punctelor M şi O’ în raport cu punctul O este uniformă şi rectilinie, între coordonatele asociate punctelor M şi O’ există relațiile

$$s_1 = a\,s,\;\; t_1 = a\,t \qquad (*)$$

unde a este un număr pozitiv subunitar.

Pe rigla gradată, distanța dintre punctele O şi M se exprimă printr-un număr de s unități de spațiu, iar pe cronometru, timpul t dintre punctele O şi M se exprimă printr-un număr de t unități de timp. Unitățile de măsură pentru spaţiu şi timp sunt definite de distanța şi respectiv de intervalul de timp cărora le-am atribuit valori unitare. Dacă schimbăm aceste unități de măsură, adică drept unitate de spaţiu luăm distanța de mărime u care corespunde deplasării punctului M în raport cu punctul O în unitatea de timp, iar drept unitate de timp luăm intervalul de timp de mărime $\frac{1}{u}$ care corespunde deplasării punctului M în raport cu punctul O pe unitatea de spaţiu, atunci distanța s se exprimă printr-un număr de t unități de spaţiu de mărime u conform egalității

$$s = u\,t \qquad (1_1)$$

iar timpul t se exprimă printr-un număr de s unități de timp de mărime $\frac{1}{u}$ conform egalității

$$t = \frac{1}{u}\,s \qquad (1_2)$$

Tinînd cont de (*), rezultă că dacă punctul M se identifică cu punctul A de coordonate $(1, \frac{1}{u})$, sau cu punctul B de coordonate $(u,1)$, atunci punctul O’ se identifică cu punctul A_1 de coordonate $(\frac{v}{u}, \frac{v}{u^2})$, unde $\frac{v}{u} = a$, $\frac{v}{u^2} = a\frac{1}{u}$, respectiv cu punctul B_1 de coordonate $(v, \frac{v}{u})$, unde $v = a\,u$, $\frac{v}{u} = a$. Rezultă deci că distanța s_1 se exprimă printr-un număr de s unități de spațiu de mărime $a = \frac{v}{u}$, iar timpul t_1 se exprimă printr-un număr de t unități de timp de mărime $a = \frac{v}{u}$. Dacă schimbăm însă aceste unități de măsură, adică drept unitate de spațiu luăm distanța v corespunzătoare deplasării punctului O’ în raprt cu punctul O în timpul $a = \frac{v}{u}$, iar drept unitate de timp luăm intervalul de timp $\frac{v}{u^2}$

corespunzător deplasării punctului O’ în raport cu punctul O pe distanța a = $\frac{v}{u}$, atunci distanța s_1 se exprimă printr-un număr de t unități de spațiu de mărime v conform egalității

$$s_1 = v\,t \qquad (2_1)$$

iar timpul t_1 se exprimă printr-un număr de s unități de timp de mărime $\frac{v}{u^2}$ conform egalității

$$t_1 = \frac{v}{u^2}\,s \qquad (2_2)$$

Cum se constată, schimbarea unităților de măsură implică şi o schimbare a numărului acestora, deci a coordonatelor. Insă putem să presupunem şi invers, anume că schimbarea coordonatelor a condus la schimbarea unităților de măsură. Rezultă două modalități echivalente de exprimare a distanțelor şi intervalelor de timp: 1) printr-un număr relativ de unități de măsură absolute şi 2) printr-un număr absolut de unități de măsură relative. Putem exprima această concluzie şi în modul următor:

(P) Fixarea în mod arbitrar a unităților de măsură absolute şi determinarea în mod canonic a coordonatelor relative este echivalent cu fixarea în mod arbitrar a coordonatelor absolute şi determinarea în mod canonic a unităților de măsură relative.

Unitățile de spațiu şi timp pe care le-am numit absolute sunt cele cărora le-am atribuit valori unitare, iar coordonatele absolute sunt coordonata t (de timp) în cazul distanțelor exprimate de egalitățile (1_1) şi (2_1), respectiv coordonata s (de spațiu) în cazul intervalelor de timp exprimate de egalitățile (1_2) şi (2_2). Celelalte unități de măsură şi respectiv coordonate le-am numit relative, deoarece – spre deosebire de cele absolute – sunt dependente de distanța sau intervalul de timp la care ne referim.

Prin schimbarea unităților de măsură şi a coordonatelor ne situăm sau în spațiu, sau în timp. In primul caz, deoarece în spațiu nu există noțiunea de interval de timp, intervalele de timp de pe cronometru le interpretăm ca distanțe, iar momentele diferite le identificăm cu momentul în care ne situăm exclusiv în spațiu. In cazul al doilea, deoarece în timp nu există noțiunea de distanță (interval de spațiu), distanțele de pe rigla gradată le interpretăm ca intervale de timp, iar locurile diferite le identificăm cu locul în care ne situăm exclusiv în timp. Aşadar în primul caz, deci dacă ne situăm în spațiu, punctele O, O’, M le vedem în acelaşi moment de timp în locuri din spațiu diferite, iar în cazul al doilea, deci dacă ne situăm în timp, punctele O, O’, M le vedem în acelaşi loc din spațiu în momente de timp diferite. Distanțele dintre locurile diferite şi intervalele de timp dintre momentele diferite în care se află punctele O, O’, M în spațiu (pe rigla gradată) şi respectiv în timp (pe cronometru) le exprimăm sub forma 1), iar distanțele dintre momentele identice şi intervalele de timp dintre locurile identice în care se află punctele O, O’, M în spațiu (pe cronometru) şi respectiv în timp (pe rigla gradată) le exprimăm sub forma 2).

Prin intermediul coordonatelor relative şi absolute evidențiem deplasarea (existența) relativă şi totodată absolută a punctelor O, O’, M în spațiu şi respectiv în timp. Deplasarea relativă în spațiu a punctelor M şi O’ în raport cu punctul O aflat în repaus relativ (în spațiu), cît şi deplasarea absolută în timp a punctelor O, O’, M este descrisă de relațiile (1_1) şi (2_1), iar deplasarea relativă în timp a punctelor M şi O’ în raport cu punctul O aflat în repaus relativ (în timp), cît şi deplasarea absolută a punctelor O, O’, M în spațiu este descrisă de relațiile (1_2) şi (2_2). In aceste cazuri, timpul absolut dintre punctele O, O’, M aflate în locul inițal şi punctele O, O’, M aflate în locul s îl identificăm cu timpul relativ dintre punctele O şi M aflate în locul s, iar distanța absolută dintre punctele O, O’, M aflate în momentul inițial şi punctele O, O’, M aflate în momentul t o identificăm cu distanța relativă dintre punctele O şi M aflate în momentul t.

Observație. Putem să deducem formulele de mai sus, în cadrul unui model matematic construit pe o dreaptă d cu oriniea într-un punct O, în modul următor. Pe dreapta d fixăm două puncte A, B astfel că O < A < B şi definim un sistem cartezian de coordonate $S:d\to R$ cu proprietatea S(O) = 0, S(B) = 1, cît şi un sistem cartezian de coordonate $T:d\to R$ cu proprietatea T(O) = 0, T(B) = 1, iar pe mulțimea ***S*** a segmentelor definim o măsură $m_S:\boldsymbol{S}\to R_+\cup\{0\}$ cu proprietatea $m_S(OO) = 0$, $m_S(OA) = 1$, cît şi o măsură $m_T:\boldsymbol{S}\to R_+\cup\{0\}$ cu proprietatea $m_T(OO) = 0$, $m_T(OB) = 1$. Atunci, notînd cu $s = S(M)$, $t = T(M)$ coordonatele asociate punctului M, segmentului OM i se asociază măsurile $s = m_S(OM)$, $t = m_T(OM)$ în raport cu unitățile de măsură OA, OB şi putem să scriem

$$OM = s\,OA = t\,OB \qquad (\alpha)$$

între unitățile de măsură OA, OB există relațiile

$$OB = u\,A,\ \ OA = \frac{1}{u}\,OB \qquad (\beta)$$

unde $u = m_S(OB)$, $\frac{1}{u} = m_T(OA)$, iar din (α) şi (β) rezultă relațiile (1_1) şi (1_2):

$$s = u\,t,\ \ t = \frac{1}{u}\,s \qquad (1)$$

In acest caz, deplasarea punctelor M şi O’ în raport cu punctul O o identificăm cu omotetia de centru O şi raport a ($0<a<1$) definită de relația

$$OO' = a\,OM \qquad (H)$$

avînd reprezentarea analitică

$$s_1 = a\,s,\ \ t_1 = a\,t \qquad (*)$$

în sistemele de coordonate S, T, unde $s_1 = S(O')$, $t_1 = T(O')$. Tinînd cont de (*), cît şi de faptul că prin omotetia (H) punctelor B şi A li se asociază punctele B_1 şi respectiv A_1 definite de relațiile

$$OB_1 = a\,OB,\ \ OA_1 = a\,OA \qquad (**)$$

amplificînd (α) cu factorul a rezultă

$$OO' = s_1\,OA = t\,OB_1,\ \ OO' = t_1\,OB = s\,OA_1 \qquad (\alpha_1)$$

Pe de altă parte, avînd în vedere că segmentelor OB_1 şi OA_1 li se asociază măsurile $v = a\,u = m_S(OB_1)$ şi respectiv $\frac{v}{u^2} = a\,\frac{1}{u} = m_T(OA_1)$ în raport cu unitățile de măsură OA şi respectiv OB, putem să scriem

$$OB_1 = v\,OA,\ \ OA_1 = \frac{v}{u^2}\,OB \qquad (\beta_1)$$

iar din (α_1) şi (β_1) rezultă relațiile (2_1) şi (2_2):

$$s_1 = v\,t,\ \ t_1 = \frac{v}{u^2}\,s \qquad (2)$$

De asemenea, avînd în vedere că schimbările de unități de măsură (β) şi (β_1) sunt echivalente cu schimbările de coordonate (1) şi respectiv (2), putem remarca şi în cadrul acestui model matematic concluzia (P).

Deplasarea în spațiu şi timp a punctului M în raport cu punctul O‘, aflat în mişcare în spațiu şi timp conform (2) , este descrisă de relațiile

$$s_2 = s - v\,t,\ \ t_2 = t - \frac{v}{u^2}\,s \qquad (3)$$

In relațiile (3) apare semnul minus, deoarece am presupus că punctele O’ şi M se deplasează în acelaşi sens în raport cu punctul O. Dacă presupunem că punctul O’ se află în repaus relativ, atunci punctele O şi M se deplasează în sensuri opuse (Fig.2).

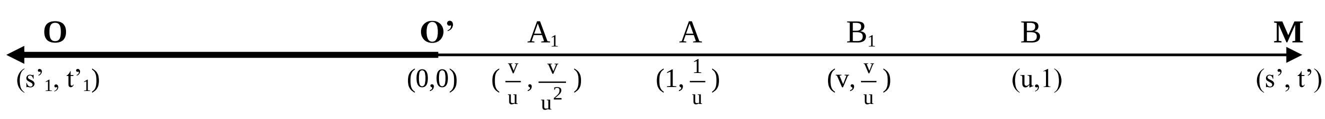

Fig. 2

In acest caz, deplasarea în spațiu şi timp a punctelor M şi O în raport cu punctul O’ este descrisă de relațiile

$$s' = u\,t',\ \ t' = \frac{1}{u}\,s' \qquad (1')$$

şi respectiv de relaţiile

$$s'_1 = v\,t',\ \ t'_1 = \frac{v}{u^2}\,s' \tag{2'}$$

iar deplasarea punctului M în raport cu punctul O este descrisă de relaţiile

$$s'_2 = s' + v\,t',\ \ t'_2 = t' + \frac{v}{u^2}\,s' \tag{3'}$$

Formulele (1‘), (2‘) şi (3‘) pot fi deduse la fel ca şi formulele (1), (2) şi (3). In cazul modelului matematic avem în vedere omotetia de centru O‘ şi raport a definită de relaţia

$$OO' = a\,O'M \tag{H'}$$

Să remarcăm însă că distanţele şi intervalele de timp dintre punctele O, O‘, M în cazul în care punctul O este considerat în repaus relativ (Fig.1), nu pot fi egale cu distanţele şi intervalele de timp (omoloage) dintre punctele O, O‘, M în cazul în care punctul O‘ este considerat în rpaus relativ (Fig.2). De exemplu, dacă comparăm distanţa s‘ şi timpul t‘ (Fig.2) cu distanţa s_2 şi timpul t_2 (Fig.1) dintre punctele O‘ şi M, rezultă sistemul de ecuaţii

$$s' = k\,(s - v\,t),\ \ t' = k\,(t - \frac{v}{u^2}\,s) \tag{4}$$

care are soluţiile

$$s = k\,(s' + v\,t'),\ \ t' = k\,(t' + \frac{v}{u^2}\,s') \tag{5}$$

dacă factorului k îi atribuim valoarea

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}} \tag{6}$$

Invers, comparînd distanţa s şi timpul t (Fig.1) cu distanţa s'_2 şi timpul t'_2 (Fig.2) dintre punctele O şi M, rezultă sistemul de ecuaţii (5), care are soluţiile (4) dacă factorului k îi atribuim valoarea dată de (5).

Putem să obţinem şi o altă concluzie pe baza formulelor (4) şi (5), dacă punctului considerat în repaus relativ îi asociem un sistem de referinţă alcătuit din două sisteme de coordonate, unul pentru spaţiu (rigla gradată) şi altul pentru timp (cronometrul). In acst caz, formulele (4) şi (5) definesc schimbarea sistemului de referinţă, sau trecerea dintr-un sistem de referinţă în altul. De asemenea, dacă deplasarea în acelaşi sens a punctelor O’ şi M în raport cu punctul O (Fig.1) o considerăm reală (există în realitate), iar deplasarea în sensuri opuse a punctelor O şi M în raport cu punctul O’ (Fig.2) o considerăm virtuală (există ca posibilitate), atunci prin schimbarea sistemului de referinţă, deplasarea reală devine virtuală, iar cea virtuală dvine reală.

Ca exemplu concret, putem să presupunem că punctele O şi O’ reprezintă două repere fixate pe o şosea rectilinie şi respectiv pe o platformă aflată în mişcare pe şosea, iar punctul M reprezintă un observator care se deplasează în acelaşi sens cu plarforma. Dacă presupunem că observatorul M se deplasează pe şosea, atunci ne referim la Fig.1, iar dacă presupunem că observatorul M se deplasează pe platformă, atunci ne referim la Fig.2. In primul caz, deplasarea în acelaşi sens a observatorului şi reperului O’ în sistemul de referinţă cu originea O (asiciat şoselei) este exprimată de relaţiile (1), (2) şi (3), iar în cazul al doilea, deplasarea în sensuri opuse a observatorului şi reperului O în sistemul de referinţă cu originea O’ (asociat platformei) este descrisă de relaţiile (1’), (2’) şi (3’). Dacă presupunem că deplasarea observatorului pe şosea (Fig.1) este reală, atunci deplasarea observatorului pe platformă (Fig.2) este virtuală. Prin schimbarea sistemului de referinţă, deci dacă observatorul decide să-şi continue deplasarea pe platformă, atunci deplasarea observatorului pe şosea (Fig.1) devine virtuală, iar deplasarea observatorului pe platformă (Fig.2) devine reală.