Transformările Galilei sunt un set de ecuații care descriu cum se schimbă coordonatele unui punct P între două sisteme de referință R, R’ în mișcare cu viteza constană v unul față de altul. De exemplu, la trecerea de la sistemul de referință R la R’, transformările Galilei sunt date de ecuațiile:

$$x' = x - v\,t, \quad y' = y, \quad z' = z$$

iar la trecerea de la sistemul de referință R’ la R, transformările Galilei sunt date de ecuațiile:

$$x = x' + v\,t', \quad y = y', \quad z = z'$$

unde x, y, z sunt coordonatele punctului P în sistemul de referință R, iar x’, y’, z’ sunt coordonatele punctului P în sistemul de referință R’. În diagrama din Fig.1 am prezentat punctul de vedere al observatorilor din sistemul de referință R, conform cărora originea O’ a sistemului de referință R’ se apropie cu viteza v de punctul P. În diagrama din Fig.2 am prezentat punctul de vedere al observatorilor din sistemul de referință R’, conform cărora originea O a sistemului de referință R se depărtează cu viteza -v de punctul P. Dacă presupunem că punctul P este de fapt un observator, atunci în primul caz, observatorul P se află în repaus la distanța x în sistemul de referință R, iar în cazul al doilea, observatorul P se află în repaus la distanța x’ în sistemul de referință R’. Cu alte cuvinte, observatorul P ar fi un ”observator excepție”, deoarece spre deosebire de ceilalți observatorii, care se află în repaus în doar unul dintre sistemele de referință R, R’, observatorul P se află în repaus în ambele sisteme de referință. Evident, un același observator P se poate afla în repaus în două sisteme de referință diferite, dar nu în același timp. Rezultă că timpul t în care originea O’ se apropie de punctul P aflat în repaus în sistemul de referință R (Fig.1), nu se identifică cu timpul t’ în care originea O se depărtează de punctul P aflat în repaus în sistemul de referință R’ (Fig.2). Dar dacă timpul măsurat în sistemul de referință R nu se identifică cu timpul măsurat în sistemul de referință R’ ($t \neq t'$), atunci nici pozițiile punctului P calculate în raport cu cu originile sistemelor de referință R, R’ nu pot fi identice ($x' \neq x - vt$, $x \neq x' + vt'$). Să vedem în ce constă aceste diferențe.

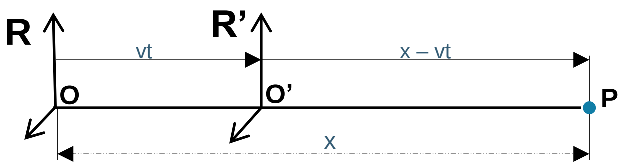

Fig.1

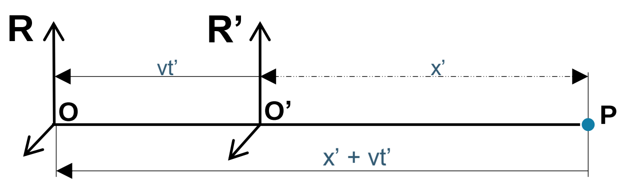

Fig.2

Presupunem că măsurătorile într-un sistem de referință sunt efectuate de un (robot) topograf care se deplasează cu viteza constantă u (u > v). Pentru a reprezenta grafic măsurătorile efectuate de topograf, axa absciselor sistemului de referință o privim atât ca ”axa spațială”, pentru a reprezenta distanțele parcurse de topograf în diverse intervale de timp, cât și ca ”axa temporală”, pentru a reprezenta intervalele de timp în care topograful parcurge diverse distanțe. În sistemul de referință R (Fig.3), mișcarea topografului este exprimată de ecuațiile:

(1) $$x = u\,t, \quad t = \frac{1}{u}x$$

unde u este distanța parcursă de topograf în unitatea de timp (viteza tepografului pe axa spațială), iar $\frac{1}{u}$ (inversul vitezei u) este intervalul de timp în care topograful parcurge o unitate de spațiu (viteza topografului pe axa temporală).

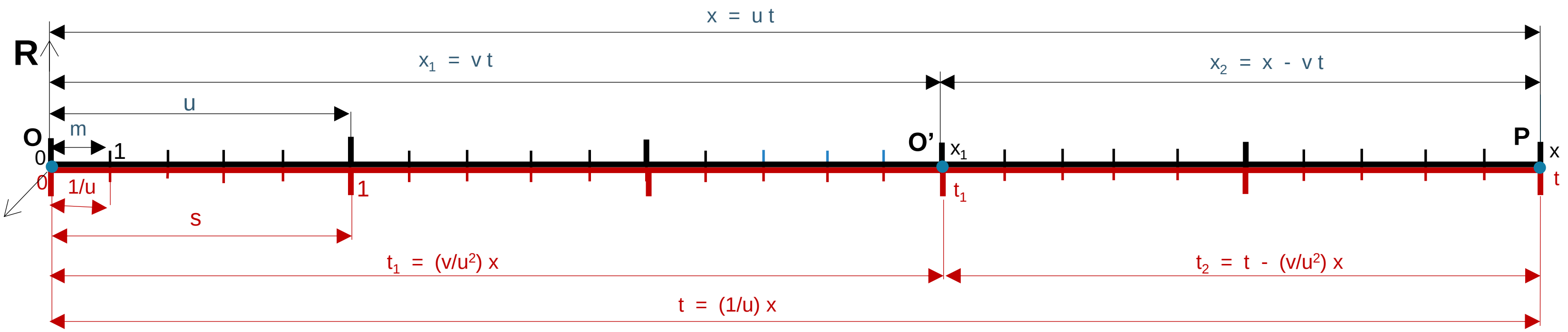

Fig.3 Axa absciselor sistemului de referință R o privim atât ca ”axă spațială”, pentru a reprezenta distanțele parcurse în diverse intervale de timp, cum ar fi unitatea de timp ”s” sau timpul t, cât și ca ”axă temporală”, pentru a reprezenta intervalele de timp în care sunt parcurse diverse distanțe, cum ar fi unitatea de spațiu ”s” sau distanța x.

Cum se constată și în diagrama din Fig.3, distanța parcursă de topograf între punctele O și P, alcătuită din x unități de spațiu (m) și respectiv din t distanțe de mărime u conform primei ecuații din (1), este reprezentată pe axa spațială, iar timpul în care topograful s-a deplasat între punctele O și P, alcătuit din t unități de timp (s) și respectiv din x intervale de timp de mărime $\frac{1}{u}$ conform celei de a doua ecuații din (1), este reprezentat pe axa temporală. Remarcăm că în timpul t și respectiv pe distanța x s-a deplasat nu doar topograful, ci și sistemul de referință R. Putem sesiza această mișcare a sistemului de referință R, dacă timpul t și distanța x le reprezentăm pe două axe rectangulare (Fig.4). În acest caz, dacă notăm cu $\boldsymbol{\xi}$ distanța parcursă de sistemul de referință R în timpul t, respectiv cu $\boldsymbol{\tau}$ timpul în care sistemul de referință R s-a deplasat pe distanța x, mișcarea în spațiu și în timp a sistemului de referință R este dată de ecuațiile:

$$\boldsymbol{\xi} = \lambda t, \quad \boldsymbol{\tau} = \mu x$$

care însă nu pot fi rezolvate, deoarece observatorii din sistemul de referință R nu pot preciza nici distanța λ parcursă de sistemul de referință R în unitatea de timp (s) și nici timpul μ în care sistemul de referință R parcurge o unitate de spațiu (m).

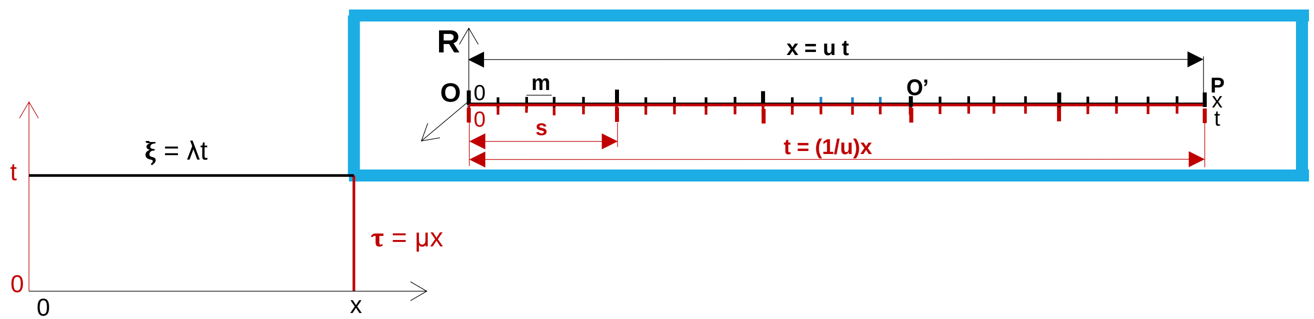

Fig.4 Distanța $\boldsymbol{\xi}$ pe care sistemul de referință R s-a deplasat în timpul t este reprezentată pe orizontală, iar timpul $\boldsymbol{\tau}$ în care sistemul de referință R s-a deplasat pe distanța x este reprezentat pe verticală.

Dacă topograful a pornit din originea O a sistemului de referință R, simultan cu originea O' a sistemului de referință R', atunci mișcarea punctului O' o putem identifica cu o "contracție" a mișcării topografului. În acest caz, dacă notăm cu α raportul vitezelor, deci presupunem că $v = \alpha u$, unde α este un număr pozitiv subunitar ($0 < \alpha < 1$), ecuațiile care descriu mișcarea punctului O' în raport cu punctul O pot fi obținute din ecuațiile (1) pe care le amplificăm cu factorul α. Rezultă ecuațiile:

$$x_1 = v\,t, \quad t_1 = \frac{v}{u^2}\,x \tag{2}$$

unde am notat $x_1 = \alpha x$, $t_1 = \alpha t$, $\frac{v}{u^2} = \alpha \frac{1}{u}$. Conform (2), distanța x_1 parcursă (cu viteza v) de punctul O' pe axa spațială este alcătuită din t distanțe de mărime v, iar timpul t_1 în care punctul O' s-a deplasat (cu viteza $\frac{v}{u^2}$) pe axa temporală este alcătuit din x intervale de timp de mărime $\frac{v}{u^2}$. Cum rezultă din ecuațiile (1) și (2), topograful și originea O' se află în locuri diferite (x și respectiv x_1) pe axa spațială, cât și în momente diferite (t și respectiv t_1) pe axa temporală. Putem să calculăm aceste diferențe cu formulele:

$$x_2 = x - v\,t, \quad t_2 = t - \frac{v}{u^2}\,x \tag{3}$$

unde x_2 este distanța parcursă de topograf (cu viteza u-v) în raport cu originea O' pe axa spațială a sistemului de referință R, iar t_2 este timpul în care topograful s-a deplasat (cu viteza $\frac{1}{u} - \frac{v}{u^2}$) în raport cu originea O' pe axa temporală a sistemului de referință R. În ecuațiile (3) am utilizat notațiile provizorii x_2, t_2 în locul notațiilor consacrate x', t', pentru că deocamdată nu știm dacă punctul de vedere al observatorilor din sistemul de referință R coincide cu cel al observatorilor din sistemul de referință R', adică deocamdată nu știm dacă în relațiile:

$$x' = k\,x_2\,, \quad t' = k\,t_2 \tag{*}$$

factorul k este unitar. Ceea ce deocamdată putem remarca, este că din punctul de vedere al observatorilor din sistemul de referință R, mișcarea topografului între punctele O' și P este descrisă de ecuațiile:

$$x_2 = u\,t_2, \quad t_2 = \frac{1}{u}\,x_2$$

iar din punctul de vedere al observatorilor din sistemul de referință R', mișcarea topografului între punctele O' și P este descrisă de ecuațiile:

$$x' = u\,t', \quad t' = \frac{1}{u}\,x' \tag{1'}$$

Pe de altă parte, mișcarea în sens opus a originii O a sistemului de referință R în raport cu originea O' a sistemul de referință R' este descrisă de ecuațiile:

$$x'_1 = v\,t', \quad t'_1 = \frac{v}{u^2}\,x' \tag{2'}$$

care au rezultat din ecuațiile (1') pe care le-am amplificat cu factorul α și am efectat notațiile: $x'_1 = \alpha x'$, $t'_1 = \alpha t'$, $v = \alpha u$, $\frac{v}{u^2} = \alpha \frac{1}{u}$. Conform (2'), distanța x'_1 parcursă (cu viteza –v) de originea O în raport cu originea O' pe axa spațială a sistemului de referință R' este alcătuită din t' distanțe de mărime v, iar timpul t'_1 în care originea O s-a deplasat (cu viteza $-\frac{v}{u^2}$) în raport cu originea O' pe axa temporală a sistemului de referință R' este alcătuit din x' intervale de timp de mărime $\frac{v}{u^2}$.

Ținând cont de ecuațiile (1’) și (2’), rezultă ecuațiile:

$$x'_2 = x' + v\,t', \quad t'_2 = t' + \frac{v}{u^2}x' \tag{3'}$$

unde x'_2 este distanța parcursă de topograf (cu viteza u+v) în timpul t’ în raport cu originea O pe axa spațială a sistemului de referință R’, iar t'_2 este timpul în care topograful s-a deplasat (cu viteza $\frac{1}{u} + \frac{v}{u^2}$) în raport cu originea O pe axa temporală a sistemului de referință R’. În ecuațiile (3’) am utilizat notațiile provizorii x'_2, t'_2 în locul notațiilor consacrate x, t, pentru că deocamdată nu știm dacă punctul de vedere al observatorilor din sistemul de referință R’ coincide cu cel al observatorilor din sistemul de referință R, adică deocamdată nu știm dacă în relațiile:

$$x = k\,x'_2, \quad t = k\,t'_2 \tag{**}$$

factorul k este unitar. Pentru a determina factorul k din ecuațiile (*) și (**), remarcăm că acestea se reprezintă sub forma unor sisteme de ecuații Cramer:

$$x' = k\,(x - v\,t), \quad t' = k\,(t - \frac{v}{u^2}x) \tag{6}$$

$$x = k\,(x' + v\,t'), \quad t = k\,(t' + \frac{v}{u^2}x') \tag{7}$$

dacă ținem cont de relațiile (3) și respectiv (3’). Cum se poate constata, sistemul de ecuații Cramer (6) în necunoscutele x, t are soluțiile (7), numai dacă factorului k i se atribuie valoarea neunitară:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}} \tag{8}$$

De asemenea și invers, cu k dat de (8), sistemul de ecuații Cramer (7) în necunoscutele x’, t’ are soluțiile (6). Prin urmare, dacă procesul de măsurare în sistemele de referință R, R’ se desfășoară cu o viteză constantă u (finită), atunci rezultatele măsurătorilor nu pot fi identice. Mai exact, așa cum rezultă din relațiile (6) și (7), distanțele pe axa spațială și intervalele de timp pe axa temporală, la care este situat un punct P în raport cu originile sistemelor de referință R, R’, pot fi cel mult proporționale (Fig.6). Remarcăm că rezultatele măsurătorilor efectuate în sistemele de referință R, R’ sunt identice, adică factorul k = 1 și ecuațiile (6), (7) se identifică cu transformările Galilei, doar dacă procesul de măsurare se desfășoară cu o viteză infinită (u = ∞).

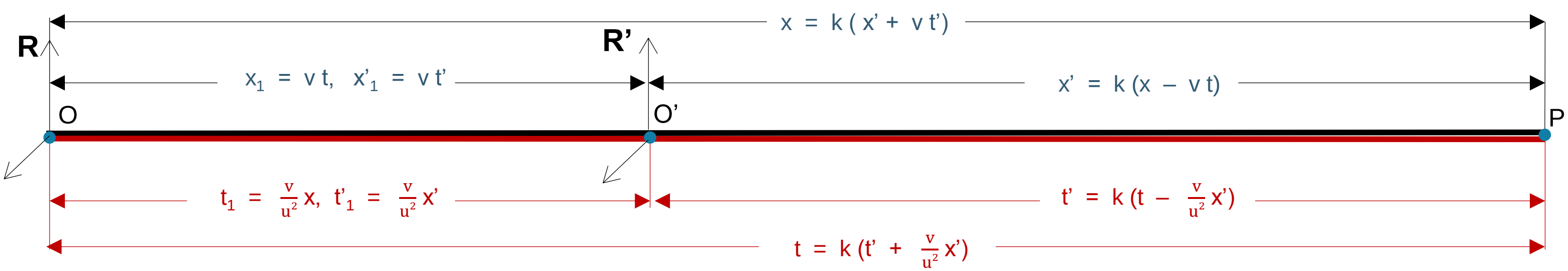

Fig.5 Schimbarea coordonatelor unui punct P în raport cu două sisteme de referință R, R’ în mișcare cu viteza v unul față de altul este dată de ecuațiile (6) și (7) cu k dat de (8).