Reprezentarea analitică a unei omotetii în raport cu două sisteme de coordonate

Fie d o dreaptă orientată cu originea într-un punct O și fie omotetia de centru O și raport a ($0<a<1$) definită de relația

$$(H) \qquad OO' = aOM$$

Pe dreapta d (Fig.1) fixăm două puncte A, B astfel că $O<A<B$ și definim un sistem cartezian de coordonate $S:d\rightarrow R$ cu proprietatea $S(O)=0$, $S(A)=1$, cât și un sistem cartezian de coordonate $T:d\rightarrow R$ cu proprietatea $T(0)=0$, $T(B)=1$, iar pe mulțimea D a segmentelor definim o măsură $m_S:D\rightarrow R_+U\{0\}$ cu proprietatea $m_S(OO)=0$, $m_S(OA)=1$, cât și o măsură $m_T:D\rightarrow R_+U\{0\}$ cu proprietatea $m_T(OO)=0$, $m_T(OB)=1$. Atunci, notând cu $x=S(M)$, $t=T(M)$ coordonatele asociate punctului M și cu $x_1=S(O')$, $t_1=T(O')$ coordonatele asociate punctului O', omotetia (H) va avea reprezentările analitice

$$(H^*) \qquad x_1 = a\,x,\ \ t_1 = a\,t$$

în sistemele de coordonate S și respectiv T. Conform (H*), coordonatele asociate punctului O' într-un sistem de coordonate se exprimă în funcțe de coordonatele asociate punctului M în același sistem de coordonate. Având însă două sisteme de coordonate, mai avem un caz în care omotetiei (H) i se asociază două reprezentări analitice, cel în care coordonatele asociate punctului O' într-un sistem de coordonate se exprimă în funcție de coordonatele asociate punctului M în celălalt sistem de coordonate. Vom evidenția reprezentări analitice din acest caz în cele ce urmează.

Ținând cont că între între unitățile de măsură OA, OB există relațiile

$$(a) \qquad OB = uOA,\ OA = (1/u)OB$$

unde $u=m_S(OB)$, $1/u=m_T(OA)$, iar segmentului OM i se asociază măsurile $x=m_S(OM)$, $t=m_T(OM)$ în raport cu unitățile de măsură OA, OB

$$(b) \qquad OM = xOA = tOB$$

din (a) și (b) rezultă că între coordonatele x și t există relațiile

$$(1) \qquad x = u\,t,\ \ t = (1/u)\,x$$

Pe de altă parte, având în vedere că prin omotetia (H), punctelor B și A li se asociază punctele B_1 și respectiv A_1 definite de relațiile

$$\text{(c)} \qquad OB_1 = aOB,\ \ OA_1 = aOA$$

amplificând (b) cu factorul a și ținând cont de (c), (H), (H*) rezultă

$$(a_1) \qquad OO' = x_1OA = tOB_1,\ \ OO' = t_1OB = xOA_1$$

Totodată, ținând cont că segmentului OB_1 i se asociază măsura

$$m_S(OB_1) = am_S(OB) = au = v$$

în raport cu unitatea de măsură OA, iar segmentului OA_1 i se asociază măsura

$$m_T(OA_1) = am_T(OA) = a(1/u) = (v/u)(1/u) = v/u^2$$

în raport cu unitatea de măsură OB, conform (c) și (a) avem

$$(b_1) \qquad OB_1 = aOB = auOA = vOA,\ \ OA_1 = aOA = a(1/u)OB = (v/u^2)OB$$

iar din (a_1) și (b_1) rezultă relațiile

$$(2) \qquad x_1 = vt,\ \ t_1 = (v/u^2)x$$

care sunt reprezentările analitice ale omotetiei (H) în cel de-al doilea caz.

Fig.1